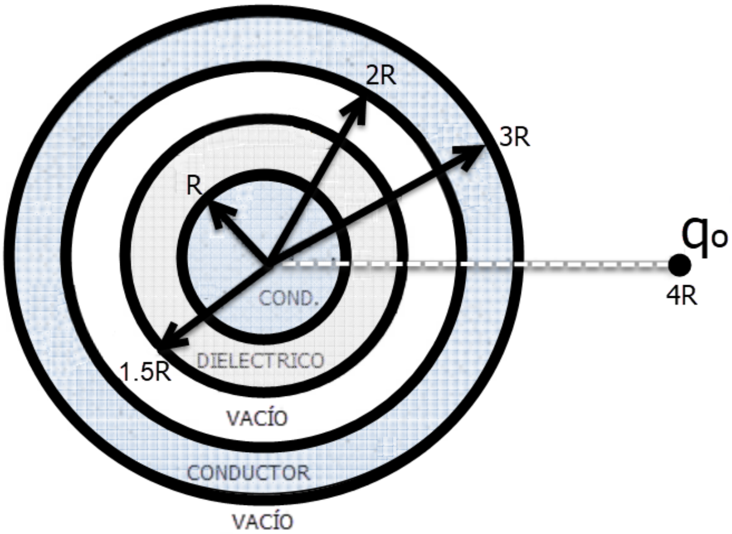
Problema de 1er parcial 1C2009

Dado el conductor cilíndrico de la figura que posee, en su macizo interior de radio R, una carga por unidad de longitud λ. Se pide hallar el trabajo necesario para desplazar la carga q_0 desde su posición alejada $4R$ hasta el centro de la configuración. Se sabe además que el conductor macizo interior está recubierto por un dieléctrico de permitividad $\epsilon_1$hasta una distancia $1.5R$, y por una cáscara cilíndrica conductora descargada de radio interior $2R$ y exterior $3R$, todos concéntricos. Considerar que la presencia de la carga q_0 no modifica las distribuciones de carga de los conductores.

Datos: R, q_0, λ, ε_1



Para calcular el trabajo necesario para llevar q_0 desde $4R$ a 0 (esto es, tabajo hecho por un agente externo contra el campo eléctrico) tenemos que evaluar

$$\begin{aligned} W_{4R\to 0} &= -\int_{4R}^{0} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = -\int_{4R}^{0} q_0\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = q_0\left[-\int_{4R}^{0} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}\right] \\ &= q_0\left[V(0) - V(4R)\right] \end{aligned}$$

Calculamos entonces el campo eléctrico en todo el espacio usando el teorema de Gauss. En todos los casos, la simetría cilíndrica (siempre que estemos alejados de las "tapas" del cilindro) de la configuración permite ver que $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r)\,\hat{\mathbf{r}}$ y como superficie de Gauss tomamos un cilindro concéntrico a los que forman parte de la configuración y de longitud $L' \ll L$ (para garantizar la condición anterior).

$r < R$ En este caso, por estar dentro del conductor es $E = 0$.

$R < r < 1.5R$ Dentro del dieléctrico usamos el teorema de Gauss generalizado

$$\oint\!\!\!\oint \mathbf{D}\cdot d\mathbf{s} = Q_{\substack{libre\\enc}}$$

La carga libre encerrada por la superficie de Gauss será la del conductor interior

$$\begin{aligned} D(r)\,2\pi r L' &= \lambda L' \\ D(r) &= \frac{\lambda}{2\pi r} \end{aligned}$$

o sea,

$$\mathbf{D}(r) = \frac{\lambda}{2\pi r}\hat{\mathbf{r}}$$

de modo que

$$\mathbf{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_1 r}\hat{\mathbf{r}}$$

$1.5R < r < 2R$ En esta región se tiene vacío

$$\begin{aligned} \oint\!\!\!\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} &= \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \\ E(r)\,2\pi r L' &= \frac{\lambda L'}{\epsilon_0} \\ E(r) &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \end{aligned}$$

o sea,

$$\mathbf{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{\mathbf{r}}$$

$2R < r < 3R$ Conductror, $E = 0$.

$r > 3R$

$$\begin{aligned}
\oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} &= \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \\
E(r)\, 2\pi r L' &= \frac{\lambda L'}{\epsilon_0} \\
E(r) &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}
\end{aligned}$$

Luego,

$$V(0) - V(4R) = -\int_{4R}^{0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_{4R}^{3R} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \int_{2R}^{1.5R} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \int_{1.5R}^{R} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Escribiendo 3/2 en vez de 1.5:

$$\begin{aligned}
&= -\int_{4R}^{3R} \frac{\lambda dr}{2\pi\epsilon_0 r} - \int_{2R}^{\frac{3}{2}R} \frac{\frac{3}{2}\lambda dr}{2\pi\epsilon_0 r} - \int_{\frac{3}{2}R}^{R} \frac{\lambda dr}{2\pi\epsilon_0\epsilon_1 r} \\
&= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\left[\ln\left(\frac{3}{4}\right) + \ln\left(\frac{3/2}{2}\right) + \frac{1}{\epsilon_1}\ln\left(\frac{1}{3/2}\right)\right] \\
&= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\left[\ln\left(\frac{16}{9}\right) + \frac{1}{\epsilon_1}\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right]
\end{aligned}$$

Así,

$$\boxed{W_{4R\to 0} = \frac{q_0\lambda}{2\pi\epsilon_0}\left[\ln\left(\frac{16}{9}\right) + \frac{1}{\epsilon_1}\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right]}$$